1. Алфавит алгебры высказываний.

Условимся высказывания обозначать заглавными буквами латинского алфавита А, В, С, ... Если высказывание А истинно, то говорят значение высказывания А истинно и символически это записывают так λ(А) = или А = . Если высказывание В ложно, то говорят значение высказывания В ложно и символически записывают так λ(В) = или В = .

1. понятие формулы алгебры высказываний

В формулу (X ˄ У)→ Z вместо переменных X, У, Z можно подставлять конкретные вы­сказывания, после чего вся формула будет превращаться в некото­рое составное высказывание. Переменные, вместо которых можно подставлять высказывания, т.е. переменные, пробегающие множе­ство высказываний, называют пропозициональными переменными, или высказывательными переменными, или переменными высказыва­ниями. Будем обозначать пропозициональные переменные заглав­ными буквами латинского алфавита Р, Q, R, S, X, У, Z или такими же буквами с индексами Р1 Р2, ..., Q1 Q2, X1 Х2, ..., У1 У2, ... . Теперь дадим точное определение формулы алгебры высказываний.

Определение 2.1

1. Каждая отдельно взятая пропозициональная переменная есть формула алгебры высказываний.
2. Если F1 и F2 — формулы алгебры высказываний, то выраже­ния ¬ F1(F1 ˄ f2), (F1 v F2), (F1 → F2), (F1 ↔ F2) также являются формулами алгебры высказываний.
3. Никаких других формул алгебры высказываний, кроме полу­чающихся согласно п. 1 и 2, нет.

Определения такого типа называются индуктивными. В них имеются прямые пункты (в данном случае п. 1 и п. 2), где задаются объекты, которые в дальнейшем именуются определяемым тер­мином (в данном случае — формулами алгебры высказываний), и косвенный пункт (в данном случае п. 3), в котором говорится, что такие объекты исчерпываются объектами, заданными в прямых пунктах. Среди прямых пунктов имеются базисные пункты (в дан­ном случае п. 1), где указываются некоторые конкретные объек­ты, именуемые в дальнейшем определяемым термином, и индук­тивные пункты (в данном случае п. 2), где даются правила получе­ния определяемых объектов, в частности из объектов, перечис­ленных в базисных пунктах.

В настоящей главе формулы алгебры высказываний будем на­зывать просто формулами. Есть и другие названия для понятия формулы: правильно построенная формула или правильно по­строенное выражение, но они представляются менее предпочти­тельными. Само определение формулы, носящее индуктивный характер, на первых порах кажется непривычным. Определения такого типа вам ранее не встречались. Лучшее понимание этого определения наступит, когда вы научитесь применять его для оп­ределения того, является или не является формулой последова­тельность символов (слово), составленная из пропозициональных переменных, символов логических операций и скобок.

К этому полезно добавить следующее. Для каждой формулы должна существовать конечная последовательность всех ее под­формул, т.е. такая конечная последовательность, которая начина­ется с входящих в данную формулу пропозициональных перемен­ных, заканчивается самой этой формулой, и каждый член этой последовательности, не являющийся пропозициональной пере­менной, есть либо отрицание уже имеющегося члена этой после­довательности, либо получается из двух уже имеющихся членов этой последовательности их соединением с помощью одного из знаков ˄ , v , → , ↔и заключением полученного выражения в скобки. Такую последовательность всех подформул данной фор­мулы иногда называют порождающей последовательностью для данной формулы. Наличие такой последовательности у логичес­кого выражения служит критерием того, что выражение является формулой. Это свойство отличает формулы.

Приведем примеры формул. На основании п. 1 определения 2.1 формулами будут пропозициональные переменные: Р, Q, R, X, У, Z; Р1, Р2, ..., Q\, Q2, Х1 Х2, ... . Далее на основании п. 2 того же определения из этих формул построим следующие: ¬ Р, ¬Q, ¬ X, ¬ Y, ¬ Z (Р v R), (X ˄Y), (Х→ Z), (Q ↔ R), (Y˅ Z). Из построенных формул также на основании п. 2 строим еще более сложные формулы: (¬ Р ˄ ¬ Q), (Р ˄¬ P), ((X ˄ Y) →Z), ((Х→ Z)˄ (Y˅Z)), ((Р v R) → (Q ↔ R)), ((X → Z) →Y). Ясно, что процесс построения все более сложных формул может про­должаться безгранично.

Приведем примеры выражений, не являющихся формулами. Это в каком-то смысле нелепые выражения. К примеру, выражение ((XY) →Z) было бы формулой на основании п. 2 определения 2.1, если бы формулами были выражения (XY) и Z Выражение Z есть пропозициональная переменная и потому на основании п. 1 определения 2.1 является формулой. Рассмотрим выражение (XY). Оно было бы формулой, если бы между формулами Хи Yстоял один из знаков логических связок. Но такого знака нет. Следова­тельно, выражение (XY) не формула, и исходное выражение ((XY) Z) формулой также не является.

Таким образом, индуктивный характер определения 2.1 дает возможность эффективно решать для каждого выражения, явля­ется оно формулой алгебры высказываний или нет.

Вот еще примеры выражений, не являющихся формулами (убе­дитесь в этом самостоятельно): ((Р-.0 л (Р -»/?)), (Р л Q v R), ((\*->) л Z), (X v -.7) Ы^л ^Г).

Итак, требование внешних скобок у формулы не является из­лишним формализмом. Тем не менее внешние скобки придают формуле громоздкость и, если данная формула не входит состав­ной частью в более сложную формулу, не несут никакой инфор­мации и смысловой нагрузки. Поэтому внешние скобки в оконча­тельно записанной формуле договариваются опускать. Например, формулу ((X ˄ Y)→ Z) будем записывать в виде (X ˄ Y)→ Z, а вместо формулы ((X˅¬У)→ (¬X˄¬У)) будем писать (X˅¬У)→ (¬X˄¬У). Но если данная формула должна будет войти состав­ной частью в более сложную формулу, то сначала заключаем ее во внешние скобки и только потом отправляем в процедуру пост­роения новой формулы.

3. Логические операции над высказываниями.

Так как высказывания принимают значения истины или лжи, то их можно рассматривать как особые величины и ввести для них соответствующие действия, которые называются логическими операциями и определяются так

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| А | В |  | А∧В | А∨В | А→В | А↔В |
|  |  | ∧ |  |  |  |  |
|  | ∧ | ∧ | ∧ |  | ∧ | ∧ |
| ∧ |  |  | ∧ |  |  | ∧ |
| ∧ | ∧ |  | ∧ | ∧ |  |  |
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |



*Определение* 1. Отрицанием высказывания А называется высказывание, обозначаемое  (читается “не А” или “неверно, что А”), которое истинно тогда, когда А ложно и ложно, когда А истинно.

С помощью таблицы это определение запишем так (см. столбцы 1 и 3).

*Определение* 2. Конъюнкцией высказываний А и В, называется высказывание, обозначаемое А ∧ В (читается А и В), которое истинно в единственном случае, когда оба высказывания А и В истинны и ложно в остальных случаях ( см. столбцы 1, 2 и 4).

Конъюнкции двух высказываний в обычной речи соответствует союз “и”.

*Определение* 3. Дизъюнкцией двух высказываний А и В, называется высказывание, обозначаемое А∨В (читается “А или В”), которое истинно в тех случаях, когда хотя бы одно из высказываний А или В истинно, и ложно в единственном случае, когда оба высказывания А и В ложны (см. столбцы 1, 2 и 5).

Заметим, что операции дизъюнкция соответствует союз “или”, но только не в разделительном смысле, так как дизъюнкция истинна и тогда, когда оба высказывания истинны.

*Определение* 4. Импликацией двух высказываний А и В, называется высказывание, обозначаемое А→В (читается “если А, то В”, “из А следует В”, “А достаточно для В”, “В необходимо для А”), которое ложно в единственном случае, когда высказывание А истинно, а В - ложно и истинно во всех остальных случаях (см. столбцы 1, 2 и 6).

Заметим, что импликация в обычной разговорной речи не совпадает с предложением, записанным с помощью связки “если ..., то”, так как она является истинной, когда высказывание А ложно.

В записи А→В высказывание А - условие (посылка), В - заключение (следствие).

*Определение* 5. Эквивалентностью высказываний А и В, называется высказывание, обозначаемое А↔В (читается “А эквивалентно В”, “А необходимо и достаточно для В”, “В необходимо и достаточно для А”, “А тогда и только тогда, когда В”, “А равносильно В”), которое истинно тогда и только тогда, когда оба высказывания А и В одновременно истинны или одновременно ложны и ложно в остальных случаях ( см. столбцы 1, 2, 7).

1. Функция истинности

Функцией истинности называется функция h(P) = {1, если высказывание P истинно; 0, если ложно}

5. Классификация формул алгебры высказываний

Формулы алгеб­ры высказываний подразделяются на следующие типы: выполни­мые, тавтологии, опровержимые и тождественно ложные.

Формула алгебры высказываний F(X1, Х2, ..., Хп) называется выполнимой, если некоторая ее конкретизация является истин­ным высказыванием, т.е. существуют такие конкретные высказы­вания А1, A2,..., Ап, которые, будучи подставленными в эту форму­лу вместо переменных Хи Х2, ..., Хп соответственно, превращают ее в истинное высказывание. Таким образом, F(X1 Х2, ..., Хп) выполни­ма, если существуют такие конкретные высказывания А1 A2,..., Ап, что λ(F(A1, А2, ..., Ап)) = 1. Выполнимой формулой является, в частности, формула, рассмотренная в примере 2.4. Она превра­щается в истинное высказывание, если, например, вместо про­позициональных переменных Р, Q, R подставить ложные выска­зывания. Выполнима также формула (X ˄ Y) -> Z, конкретизация которой рассмотрена в начале § 2 (см. с. 23).

Формула F(X1, Х2, ..., Хп) называется тавтологией, или тожде­ственно истинной, если она превращается в истинное высказыва­ние при всякой подстановке вместо переменных конкретных вы­сказываний Аи А2,..., Ап, т.е. если λ(F(A1 А2,..., Ап)) = 1 для лю­бых высказываний А1 А2,..., Ап. Формула из примера 2.3 является тавтологией. Для обозначения тавтологии используется знак t=, ко­торый ставится перед формулой, являющейся тавтологией. Таким образом, запись =F(X1Х2, ..., Хп) означает, что формула F(X1, Х2,..., Хп) является тавтологией. В частности, для указанного при­мера можем записать =(Х-> Y)(Y v X).

Формула F(Xb Х2,..., Хп) называется опровержимой, если суще­ствуют такие конкретные высказывания А1 Аъ ..., Ап, которые пре­вращают данную формулу в ложное высказывание F(A1 А2,..., Ап), т.е. X(F(A1 Аъ ..., Ап)) = 0. Другими словами, опровержимые фор­мулы — это формулы, не являющиеся тавтологиями. Опровержи­мой является формула, рассмотренная в примере 2.4. Она обраща­ется в ложное высказывание лишь тогда, когда вместо всех пере­менных Р, Q, R подставлены истинные высказывания. Формула (X ˄ Y) -> Z также опровержима.

Наконец, формула F(X1 Х2, ..., Хп) называется тождественно ложной, или противоречием, если λ(F(A1 А2, ..., Ап)) = 0 для лю­бых конкретных высказываний А1 Аъ ..., Ап. Другими словами, тождественно ложные формулы — это такие формулы, которые не являются выполнимыми.

6. Равносильные формулы. Рефлексивность, симметричность, транзитивность отношения равносильности.

Понятие равносильности формул. Формулы F(X1 Х2 Хп) и Н(Х1 Х2, ..., Хп) алгебры высказываний называются равносильными (эквивалентными), если при любых значениях вхо­дящих в них пропозициональных переменных логические значе­ния получающихся из формул F и Н высказываний совпадают. Для указания равносильности формул используют обозначение F≡Н. Определение равносильности формул можно записать сим­волически:

F≡ H ⬄ λ(F(A1 А2,..., Ап)) = λ(Н(А1 А2 ..., Ап))

Теорема (признак равносильности формул). Две формулы F и H алгебры высказываний равносильны тогда и только тогда, когда формула F ↔ Я является тавтологией:

F≡H ⬄=F ↔H.

Доказательство. ЕслиF≡H, то по определению равносильсти λ(F(A1 ..., Ат)) = λ(Н(A1 ..., Ат)) для любых высказываний А1 ..., Ап. Тогда (по определению дизъюнкции операции эквивалентности) λ(F(A1 ..., Ат)) ↔λ(Н(А1 ..., Ап)) = 1, откуда на основании соотношения тавтологий за­ключаем, что λ(F(Ax,..., Ап) ↔ Н(Аи ...,Ап)) = 1 для любых Аь ..., Ап.

Последнее означает по определению тавтологии, что =F↔H. Об­ратными рассуждениями доказывается утверждение: если =F↔H, то F ≡H. Теорема доказана. □

Отметим, что равносильность формул — это не (логическая) операция над формулами, а отношение между формулами логики высказываний.

Следствие 4.3. Отношение равносильности между формулами алгебры высказываний:

а) рефлексивно: F ≡F;

б) симметрично: если F1 ≡ F2, то F2 ≡ F1

в) транзитивно: если F1 ≡ F2 и F2 ≡ F3, то F1≡ F3,

т.е. отношение равносильности является отношением эквивалент­ности.

Доказательство. Рефлексивность следует непосредственно из тавтологии теоремы 3.3, о и теоремы 4.2.

Для доказательства симметричности отношения ≡ предполо­жим, что F1≡F2, т.е. на основании признака равносильности (теорема признак равносильности формул) = F1 ↔ F2. Тогда по тавтологии теоремы 3.3, п зак­лючаем: формула F2 ↔F1 принимает всегда те же самые значе­ния, что и формула F1 <-> F2, т.е. только истинные значения. Следо­вательно, = F2 ↔ Fu или (по признаку равносильности) F2 ≡ Fx. Симметричность доказана.

Наконец, если F1 ≡ F2и F2 ≡ F3, т.е. = F1 ↔ F2 и = F2 ↔ F3, то на основании определения конъюнкции заключаем, что: = (F1 ↔ F2) ˄ (F2 ↔ F3). Привлекая теперь тавтологию из теоремы 3.3(свойства импликации и эквивалентности), р и правило заключения для получения тавтологий (теорема правило заключения), получаем F1 ↔ F3, или (по теореме признак равносильности формул) F1 ≡ F3. Следовательно, отношение ≡ транзитивно.

Теорема 3.5 (правило заключения). Если формулы F и F→H являются тавтологиями, то формула Н также тавтология. Други­ми словами, из =F иF→ Н следует = Н.

7. Основные равносильности формул алгебры высказываний.

Основные равносильности формул алгебры высказываний позволяют сложные формулы преобразовывать в более простые формулы алгебры высказываний.

1. закон двойного отрицания

2.  коммутативность конъюнкции

3.  ассоциативность конъюнкции

4. коммутативность дизъюнкции

5.  ассоциативность дизъюнкции

6.  1-й дистрибутивный закон

7.  2-й дистрибутивный закон

8.  1-й закон де Моргана

9.  2-й закон де Моргана

10.  1-й простой закон поглощения

11.  2-й простой закон поглощения

12. 

13. 

14. 

15. 

16. 

17. 

18.  1-й сложный закон поглощения

19.  2-й сложный закон поглощения

20. 

21.  закон контрапозиции

22. 

23.

24. 

25. 

26. 

27. 

28. 

29. Правило отрицания - обобщение законов де Моргана.

Чтобы найти отрицание формулы, включающей в себя не более трех первых логических операций, надо конъюнкцию заменить на дизъюнкцию и наоборот, переменную, стоящую в формуле без знака отрицания заменить на эту же переменную со знаком отрицания и наоборот, например,

.

8. Правило заключения получения тавтологий

Если F и F–>H – тавтологии, то H также тавтология.

9. критерий равносильности формул алгебры высказываний

Сущность признака состоит в выявлении тесной связи между понятием равносильности формул и понятием тавтологии.

*Теорема (признак равносильности формул).* Две формулы F и *H* алгебры высказываний равносильны тогда и только тогда, когда формула F *↔ Я* является тавтологией:

F≡H ⬄=F ↔H.

Доказательство. ЕслиF≡H, то по определению равносильсти λ(F(A1 ..., Ат)) = λ(Н(A1 ..., Ат)) для любых высказываний А1 ..., Ап. Тогда (по определению дизъюнкции операции эквивалентности) λ(F(A1 ..., Ат)) ↔λ(Н(А1 ..., Ап)) = 1, откуда на основании соотношения тавтологий за­ключаем, что λ(F(Ax,..., Ап) ↔ Н(Аи ...,Ап)) = 1 для любых Аь ..., Ап.

Последнее означает по определению тавтологии, что =F↔H. Об­ратными рассуждениями доказывается утверждение: если =F↔H, то F ≡H. Теорема доказана. □

Отметим, что равносильность формул — это не (логическая) операция над формулами, а отношение между формулами логики высказываний.

10. Логическое следование. Критерий логического следования

Формулы Q логически следует из формулы P, если Q принимает 1 на всяком наборе пропозиционных переменных, на которых P принимает 1. Иначе, если h(P) = 1, то h(Q) = 1. Обозначение: P |– Q. Критерий: формула Q логически следует из P тогда и только тогда, когда P–>Q – тавтология

11. *Конъюнктивные и дизъюнктивные нормальные формы формул алгебры высказываний.*

*критерии разрешимости формул алгебры следований.(нет)*

*Определение 1, 2.* Дизъюнктивным (конъюнктивным) одночленом от переменных x1, x2, ..., xn называется дизъюнкция (конъюнкция) этих переменных или их отрицаний.

Пример. 1) Дизъюнктивный одночлен от 2-х переменных: .

2) Конъюнктивный одночлен от 3-х переменных: .

*Теорема* 1. Дизъюнктивный одночлен тогда и только тогда будет тождественно истинным, когда он содержит хотя бы одну дизъюнкцию вида , то есть дизъюнкцию некоторого высказывания и его отрицания.

*Доказательство.* 1) Пусть ДО ≡И. Докажем, что он содержит . Предположим противное, то есть что ДО не содержит такой дизъюнкции. Тогда каждой переменной xk, не стоящей под знаком отрицания присвоим значение Л, а каждой переменной xp, стоящей под знаком отрицания присвоим значение И.

Рассмотрим .По определению эта дизъюнкция принимает значение лжи.

Следовательно, ДО  будет принимать значение лжи или истины в зависимости от значений истинности остальных переменных, то есть не будет ТИ. Но это противоречит условию теоремы. Значит наше допущение неверно и справедливость 1-й части теоремы (то есть необходимость) доказана.

2) Пусть ДО содержит дизъюнкцию . Докажем, что ДО ≡И. Так как ДО содержит дизъюнкцию , то по формуле равносильности 13 она является истинной, а значит и ТИ. Поэтому ДО  по определению дизъюнкции будет истинным независимо от значений остальных переменных, а значит и ТИ.

*Теорема 2.* Конъюнктивный одночлен тогда и только тогда будет тождественно ложным, когда он содержит хотя бы одну конъюнкцию вида , то есть конъюнкцию некоторого высказывания и его отрицания.

*Доказательство* (аналогично теореме 1).

*Определение* 3, 4. Дизъюнктивной (конъюнктивной) нормальной формой формулы алгебры высказываний называется равносильная ей дизъюнкция (конъюнкция), состоящая из конъюнктивных (дизъюнктивных) одночленов.

*Примеры.*

1) Дизъюнктивная нормальная форма от 3-х переменных: .

2) Конъюнктивная нормальная форма от 2-х переменных: 

*Теорема 3.* Для любой формулы алгебры высказываний всегда существует равносильная ей дизъюнктивная нормальная форма и притом не одна.

*Доказательство*. Пусть дана произвольная формула F алгебры высказываний, содержащая даже все пять логических операций. Тогда на основании равносильностей 1-29 ее всегда можно преобразовать к равносильной ей формуле F1 относительно трех операций: отрицание, конъюнкция, дизъюнкция, которая будет содержать хотя бы одну скобку с дизъюнкцией. Такая скобка на основании первого дистрибутивного закона всегда может быть представлена в виде дизъюнкции двух конъюнкций, то есть в ДН форме.

*Теорема 4.* Для всякой формулы алгебры высказываний всегда существует равносильная ей конъюнктивная форма и притом не одна.

*Доказательство* (аналогично теореме 3).

12. правильные и полные дизъюнкты и конъюнкты

Дизъюнкт (конъюнкт) является полным, относительно некоторого набора переменных, если в его составе представлены все переменные этого набора. Элементарная конъюнкция (дизъюнкция) называется правильной, если в её составе нет одинаковых переменных.

Полным дизъюнктом называется элементарная дизъюнкция, в которую каждая переменная функции входит ровно один раз. Например, для множества трех переменных Х={x,y,z} формулы x ˅ ¬ y ˅ z, ¬ x˅ ¬ y ˅ z являются полными дизъюнктами.

Полным конънктом называется элементарная конъюнкция, в которую каждая переменная функция входит ровно один раз. Например, для множества трех переменных X={x, y, z} формулы

X ¬ yz, ¬ x ¬ yz являются полными конъюнктами, а формулы x ¬ xyz и yz – не являются (в первую переменная x входит дважды, во вторую – не входит вообще). Однако, формула yz является элементарной конъюнкцией

13. Совершенные формы формул алгебры высказываний

*Определение* 1, 2. Дизъюнктивный (конъюнктивный) одночлен от n переменных высказываний x1, x2, ..., xn называется совершенным, если каждая переменная входит в него ровно один раз: либо сама, либо своим отрицанием.

Из этих определений следует, что совершенный одночлен от n переменных высказываний состоит точно из n членов.

*Примеры.*

1) СКО от двух переменных: 

2) CДО от трех переменных: , .

*Определение* 3*.* Совершенной дизъюнктивной нормальной формой формулы алгебры высказываний называется такая ДН форма этой формулы, в которой каждый ее конъюнктивный одночлен является совершенным.

*Пример.* СДНФ формулы от двух переменных .

*Определение 4.* Совершенной конъюнктивной нормальной формой формулы алгебры высказываний называется такая КН форма этой формулы, в которой каждый ее ДО является совершенным.

*Пример.* СКНФ формулы от трех переменных .

Из этих определений и доказанных выше теорем вытекают следующие принципиально важные следствия.

*Следствия 1, 2.* Для всякой формулы алгебры высказываний, не являющейся ТИ (ТЛ) существует равносильная ей СКН форма (СДН форма) и притом единственная.

Из всего выше изложенного вытекает следующий алгоритм приведения формул алгебры высказываний к совершенным нормальным формам.

1. Приводим данную формулу F алгебры высказываний к равносильной ей формуле F1 относительно первых трех логических операций.

2. Приводим полученную формулу F1 к равносильной ей нормальной форме: конъюнктивной или дизъюнктивной.

3. Если в полученной нормальной форме имеются одинаковые одночлены, то из них оставляют только один, остальные отбрасывают.

4. Если в одночлене нормальной формы имеются одинаковые переменных xk, то из них оставляют только одну, остальные отбрасывают.

5. Если в полученной нормальной форме имеется одночлен, содержащий переменную xi с ее отрицанием , то все такие одночлены отбрасывают.

6. Если какой-либо одночлен Fj от n переменных не содержит некоторой переменной xi, то он заменяется двумя одночленами вида  для случая ДН форм и двумя одночленами вида  для случая КН форм.

13. Совершенные формы формул алгебры высказываний

**Совершенные нормальные формы**

*1.4.1. Совершенная дизъюнктивная нормальная форма*

***Элементарной конъюнкцией*** высказываний называется конъюнкция этих высказываний и их отрицаний.

***Дизъюнктивной нормальной формой*** формулы *А* (ДНФ *А)* называется

дизъюнкция элементарных конъюнкций.

Для любой формулы путем равносильных преобразований можно

получить ДНФ, причем не единственную.

***Совершенной дизъюнктивной нормальной формой*** формулы *А*

(СДНФ *А)* называется дизъюнктивная нормальная форма формулы *А,*

удовлетворяющая свойствам совершенства:

1. Каждое логическое слагаемое формулы содержит все переменные,

входящие в функцию.

2. Все логические слагаемые формулы различны.

3. Ни одно логическое слагаемое формулы не содержит одновременно

переменную и ее отрицание.

4. Ни одно логическое слагаемое формулы не содержит одну и

ту же переменную дважды.

**Теорема.** Если формула *А* не является тождественно ложной, то

она может быть представлена в СДНФ *А,* и притом единственным образом.

Существует два способа нахождения СДНФ *А.*

*1-й способ -* с помощью равносильных преобразований:

- получаем одну из ДНФ;

- если в полученной ДНФ входящая в нее элементарная конъюнкция

*В* не содержит переменную *х,* то используем равносильность

*В = В* ***A(XV*** *х) = (В* ***AX)V*** *(В* ***АХ)*** И получаем две элементарных конъюнкции;

- если в ДНФ входят две одинаковые элементарные конъюнкции,

то лишнюю можно отбросить.

*2-й способ -* с помощью таблиц истинности: выделяем строки,

где формула принимает значение 1; составляем дизъюнкцию конъюнкций

при условии, что если переменная входит в конъюнкцию со

значением 1, то записываем эту переменную, если со значением 0, то

ее отрицание. Получаем СДНФ.

*1.4.2. Совершенная конъюнктивная нормальная форма*

***Элементарной дизъюнкцией*** высказываний называется дизъюнкция

этих высказываний и их отрицаний.

***Конъюнктивной нормальной формой*** формулы *А* (КНФ *А)* называется

конъюнкция элементарных дизъюнкций.

***Совершенной конъюнктивной нормальной формой*** формулы *А*

(СКНФ *А)* называется конъюнктивная нормальная форма формулы *А,*

удовлетворяющая условиям:

1. Каждое логическое слагаемое формулы содержит все переменные,

входящие в функцию.

2. Все логические слагаемые формулы различны.

3. Ни одно логическое слагаемое формулы не содержит одновременно

переменную и ее отрицание.

4. Ни одно логическое слагаемое формулы не содержит одну и

ту же переменную дважды.

**Теорема.** Если формула *А* не является тождественно истинной,

то она может быть представлена в СКНФ *А,* и притом единственным

образом.

Существует два способа нахождения СКНФ *А.*

*1- й способ-с* помощью равносильных преобразований:

- получаем одну из КНФ;

- если в полученной КНФ входящая в нее элементарная дизъюнкция

*В* не содержит переменную *х,* то используем равносильность

*В = В* v *(х* л *х) = (В* v *х)* л *(В* v *х)* и получаем две элементарных дизъюнкции;

- если в КНФ входят две одинаковые элементарные дизъюнкции,

то лишнюю можно отбросить.

*2- й способ -* с помощью таблиц истинности: выделяем строки,

где формула принимает значение 0; составляем конъюнкцию дизъюнкций

при условии, что если переменная входит в дизъюнкцию со

значением 0, то записываем эту переменную, если со значением 1, то

ее отрицание. Получаем СКНФ.

14. Получение всех логических следствий формулы алгебры высказываний

Логические следствия находят следующим образом:

1) все посылки соединяются конъюнкцией и находятся СКНФ полученной формулы.

2) при выборе любых элементарных дизъюнкций и конъюнкций любых нескольких элементарных дизъюнкций, взятых по два, три и т.д. получаются все возможные заключения из данных посылок.

15.Аксиомы и правило вывода исчисления высказываний. Вывод из группы формул

К первоначальным, не­определяемым понятиям аксиоматической теории высказываний относятся следующие: Х1 Х2,… Хп — пропозициональные пере­менные; !,=> -логические связки; (,) — технические знаки. Первоначальным понятием является также понятие формулы, ко­торое определяется (как и в алгебре высказываний, см. определе­ние 2.1) индуктивным образом:

1. каждая пропозициональная переменная есть формула;
2. если F1 и F2 — формулы, то выражения!F1 ,(F1 =>F2) также являются формулами;
3. никаких других формул, кроме получающихся согласно пунк­там 1 и 2 нет.

Следующий шаг в построении аксиоматической теории выска­зываний состоит в выборе системы аксиом. В качестве аксиом вы­бираются формулы следующих видов:





A3: ((!G=>!F)=>((!G=>F)=>G))

A_3 : A \wedge B \rightarrow A;

A_4 : A \wedge B \rightarrow B;

A_5 : A \rightarrow (B \rightarrow (A \wedge B));

A_6 : A \rightarrow (A \vee B);

A_7 : B \rightarrow (A \vee B);

A_8 : (A \rightarrow C) \rightarrow ((B \rightarrow C) \rightarrow ((A \vee B) \rightarrow C));

A_9 : \neg A \rightarrow (A \rightarrow B);

A_{10} : (A \rightarrow B) \rightarrow ((A \rightarrow \neg B)\rightarrow \neg A);

A_{11} : A\vee\neg A.

Наконец, заключительный шаг, закладывающий основу аксио­матической теории высказываний, состоит в выборе *правил выво­да.* Единственным правилом вывода будет служить правило за­ключения (или отделения, или *modus ponens,* или сокращенно MP): из формул *F* и *F G* непосредственно следует формула *G.*

Как и в алгебре высказываний, внешние скобки у формулы принято не писать.

Поскольку в аксиомах не участвуют связки л, v, то их при­дется определить. Введем следующие определения:

*(F /\ G)* означает !*(F* => !*G);*

*(F v G)* означает (!F=>G);

(F<-> *G)* означает ((F=> *G)* /\ *(G -> F)).*

*Доказательством* или *выводом* формулы F из множества формул Г называется такая конечная последователь­ность *В1 ,В2, ..., Bs* формул, каждая формула которой является либо аксиомой, либо формулой из Г, либо получена из двух пре­дыдущих формул этой последовательности по правилу MP, а пос­ледняя формула *В5* совпадает с *F (В5* ≡ *F).* Если имеется вывод формулы *F* из множества Г, то говорят, чтоFвыводима из Г или что Гвыводит *F,* и пишут Г |-*F.*

16. **Теорема** (дедукции)**.**

Если

ϕ1, ϕ2, …, ϕ*n*, ϕ ├ ψ,

то

ϕ1, ϕ2, …, ϕ*n*├ (ϕ → ψ).

**Замечания. 1.** Применяя к утверждению теоремы снова несколько раз теорему де­дукции, можно, очевидно, получить новые следствия:

ϕ1, ϕ2, …, ϕ*n*−1├ (ϕ*n* → (ϕ → ψ));

…

├ (ϕ1 → … → (ϕ*n*−1 → (ϕ*n* → (ϕ → ψ)))…).

**2.** На время доказательства теоремы введём такую терминологию. Будем называть список гипотез ϕ1, ϕ2, …, ϕ*n* *коротким* списком гипотез, а список ϕ1, ϕ2, …, ϕ*n*, ϕ *– длин­ным* списком.

**3.** Докажем сейчас, что верна теорема, обратная к теореме дедукции, а именно: если

ϕ1, ϕ2, …, ϕ*n*├ (ϕ → ψ),

то

ϕ1, ϕ2, …, ϕ*n*, ϕ ├ ψ.

Для доказательства предположим, что

*v*1

*v*2

… (1)

*vN* = (ϕ → ψ)

− формативная последовательность, являющаяся формальным выводом формулы (ϕ → ψ) из короткого списка гипотез (в силу принципа «обрубания хвостов» можно, как обычно, предполагать, что наша формула (ϕ → ψ) является последним словом в последо­вательности (1)).

Последовательность (1) тем более можно рассматривать как формальный вывод из длинного списка гипотез (это вытекает из определения формального вывода из гипотез). Добавим в конец последовательности (1) ещё две формулы:

*v*1

*v*2

… (2)

*vN* = (ϕ → ψ)

ϕ

ψ

Новая последовательность (2) снова является формальным выводом из длинного списка гипотез. В самом деле, предпоследняя формула является гипотезою, а последнюю формулу ψ можно получить по правилу modus ponens из двух предыдущих. Как видно, формула ψ выводима из длинного списка, QED[[1]](#footnote-2).

17. Непротиворечивость, полнота и разрешимость алгебры высказываний

Теория называется разрешимой, если существует процесс (алгоритм), позволяющий для любой формулы за конечное число шагов определить, является она теоремой или нет. Теория называется полной, если в ней для любой формулы F выводима сама F, либо ее отрицание. Теория, в которой множество теорем покрывает всё множество формул (все формулы являются теоремами, «истинными высказываниями»), называется противоречивой. В противном случае теория называется непротиворечивой.

18.ПРЕДИКАТЫ Определение n-местного предиката и его основных видов, предметная область, множество истиности(нет).

**Предика́т** (*n*-местный, или *n*-[арный](http://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%90%D1%80%D0%BD%D0%BE%D1%81%D1%82%D1%8C)) — это [функция](http://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%A4%D1%83%D0%BD%D0%BA%D1%86%D0%B8%D1%8F_(%D0%BC%D0%B0%D1%82%D0%B5%D0%BC%D0%B0%D1%82%D0%B8%D0%BA%D0%B0)) с множеством значений \{ 0,1 \} (или «ложь» и «истина»), определённая на множестве M={{M}_{1}}\times {{M}_{2}}\times \ldots \times {{M}_{n}}. Таким образом, каждый набор элементов множества *M* характеризуется либо как «истинный», либо как «ложный».

Предикат можно связать с математическим [отношением](http://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%9E%D1%82%D0%BD%D0%BE%D1%88%D0%B5%D0%BD%D0%B8%D0%B5_(%D0%BC%D0%B0%D1%82%D0%B5%D0%BC%D0%B0%D1%82%D0%B8%D0%BA%D0%B0)): если (m1,m2,...,mn) принадлежит отношению, то предикат будет возвращать на ней 1. В частности, одноместный предикат определяет отношение принадлежности некоторому [множеству](http://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%9C%D0%BD%D0%BE%D0%B6%D0%B5%D1%81%D1%82%D0%B2%D0%BE).

*Определение* 1. N-местным предикатом называется выражение, содержащее n переменных x1, x2, ..., xn, заданных соответственно на n множествах М1, М2, ..., Мn, или на одном и том же множестве М, которое обращается в высказывание при подстановке вместо переменных конкретных элементов из данных множеств Мi соответственно.

Условимся n-местные предикаты символически обозначать Р(x1, x2, ..., xn,), Q( x1, x2, ..., xn,)... или Р,Q, ...

Пример 1. Пусть на множестве R задано уравнение х2-3=0, тогда его можно рассмотреть как одноместный предикат

P(x) = (x2 - 3 = 0 ⏐ x ∈ R).

Например, при х=1 получим высказывание 1 - 3 = 0, -2 = 0, которое ложно, поэтому и предикат P(x) = P(1) = Л. Если , то предикат Р(x) обращается в высказывание 3-3=0, 0=0, которое истинно. Значит предикат .

Пример 2. Пусть на множестве Q задано неравенство x - y > 2. Тогда его можно рассмотреть как двухместный предикат Т(х,y) = (x-y>2 ⏐x,y, ∈Q).

Если х=5, y=3, то предикат обращается в высказывание 5-3>2, 2>2, которое ложно поэтому и предикат Т(x,y) = T(5,3) = Л. Пусть х=7, y=1, тогда получим высказывание 7-1>2 или 6>2, которое истинно, поэтому и предикат Т(х,y) = Т(7,1) = И.

Для облегчения построения теории будем считать, что переменные в предикатах заданы на одном и том же множестве. Простое высказывание будем называть О-местным предикатом.

*Определение* 2,3. N-местный предикат Р(x1, x2, ..., xn,), заданный на множестве Mi называется выполнимым (опровержимым), если существует хотя бы один набор значений переменных, при котором данный предикат обращается в истинное (ложное) высказывание.

Примеры таких предикатов рассмотрены выше.

*Определение* 4,5. Предикат Р(x1, x2, ..., xn,), заданный на множестве Mi, называется ТИ (ТЛ), если при любом наборе значений переменных он принимает значение истины (лжи).

Например, предикат Р(х,y) = (x2+y2<0 ⏐x,y, ∈R) является ТЛ.

*Определение* 6. Предикаты Р(x1, x2, ..., xn) и Q(x1, x2, ..., xn) , заданные на множестве Мi называются равносильными, если при одних и тех же наборах значений переменных они принимают значение истины.

Например, предикаты Р(x,y) = (x2-y2>0⏐x,y, ∈R) и Q(х,y) = ((x-y)(x+y)>0 ⏐x,y, ∈R) равносильны.

Из рассмотренных примеров следует, что всякое уравнение или неравенство, всякая система уравнений или неравенств от n неизвестных, заданные на тех или иных множествах является примерами n-местных предикатов.

19 . Классификация предикатов. Равносильность и следование предикатов.

Классификация предикатов. Определение 18.2. Предикат Р(хь х2, хп), заданный на множествах Ми М2, ..., Мп, называется:

а) тождественно истинным, если при любой подстановке вместо переменных хи х2, ..., хп любых конкретных предметов аи а2, ..., ап из множеств Мь М2, ..., Мп соответственно он превращается в истинное высказывание Р(аи а2, ..., ап);

б) тождественно ложным, если при любой подстановке вмес­то переменных хи х2, ...,хп любых конкретных предметов из мно­жеств Ми Мъ ..., Мп соответственно он превращается в ложное высказывание;

в) выполнимым (опровержимым), если существует по меньшей мере один набор конкретных предметов аи а2, ..., ап из мно­жеств Мь М2, ..., Мп соответственно, при подстановке которых вместо соответствующих предметных переменных в предикат Р(хь хъ хп) последний превратится в истинное (ложное) выска­зывание Р(аи а2, ..., ап).

Равносильность и следование предикатов. Определение IS. 4. Два л-местных предиката Р(хи х2, хп) и Q(xu х2, ..., хп), заданных над одними и теми же множествами Ми М2, ..., Мп, называются равносильными, если набор предметов (элементов) ах е Ми а2 е е М2, Мп превращает первый предикат в истинное выска­

зывание Р(аъ а2, ап) в том и только в том случае, когда этот набор предметов превращает второй предикат в истинное выска­зывание Q(au а2, ..., ап).

Другими словами (на языке множеств истинности), предикаты Р(хи хъ ..., хп) и Q(xu х2, ..., хп) равносильны тогда и только тогда, когда их множества истинности совпадают. Р+ = Q+.

Утверждение о равносильности двух предикатов Р и Q симво­лически будем записывать так: Р<=> Q. Отношение равносильнос­ти предикатов является отношением эквивалентности, так что совокупность всех я-местных предикатов, определенных на мно­жествах Мь М2, Мп, распадается на непересекающиеся классы равносильных предикатов (все они определяют одну и ту же функ­цию, заданную на множествах М{, М2, ..., Мп и принимающую значения в двухэлементном множестве {0, 1}). Переход от преди­ката Р{ к равносильному ему предикату Р2 называется равносиль­ным преобразованием первого. Это понятие очень важно для школь­ной математики, потому что изучаемые в ней уравнения и нера­венства представляют собой частные виды предикатов. Решение уравнения и неравенства есть поиск их множеств истинности. При таком поиске мы проделываем над уравнением и неравенством различные преобразования, и здесь важно, чтобы эти преобразо­вания были равносильными, т. е. чтобы найденное множество ока­залось бы множеством истинности именно исходного уравнения или неравенства. Аналогична ситуация при решении систем урав­нений или неравенств.

Определение 18.5. Предикат Q(xu х2, ..., хп), заданный над мно­жествами Мь М2, ..., Мп, называется следствием предиката Р(хь заданного над теми же множествами, если он превраща­ется в истинное высказывание на всех тех наборах значений пред­метных переменных из соответствующих множеств, на которых в истинное высказывание превращается предикат Р(хь х2, ..., хп).

Другими словами (в терминах множеств истинности), можно сказать, что предикат Q является следствием предиката Р тогда и только тогда, когда Р+ С Q+.

Утверждение о том, что предикат Q является следствием пре­диката Р, будем символически записывать так: Р=> Q.

*Теорема 18.6. Каждые два тождественно истинных (тождествен­но ложных) предиката, заданных на одних и тех же множествах, равносильны. Обратно, всякий предикат, равносильный тождествен­но истинному (тождественно ложному) предикату, сам является тождественно истинным (тождественно ложным) предикатом.*

*Теорема 18.7. Каждый тождественно истинный п-местный пре­дикат является следствием любого другого п-местного предиката, определенного на тех же множествах. Каждый п-местный преди­кат является следствием любого тождественно ложного п-местно- го предиката, определенного на тех же множествах.*

*Теорема 18.8. Пусть Р{хь хъ ..., хп) и Q(xu х2, ..., хп) — два п-местных предиката, определенные на одних и тех же множествах, такие, что Q(xu х2, ..., хп) есть следствие Р(хи х2, ..., хп). Тогда:*

*а) если Р(хь х2, ..., хп) тождественно истинный (выполнимый), то и Q(x{, х2, ..., хп) тождественно истинный (выполнимый);*

*б) если Q(xu х2, ..., хп) тождественно ложный (опровержимый), то и Р(х 1з х2, ..., хп) тождественно ложный (опровержимый).*

Доказательство теоремы 18.8, а. Поскольку Р => Q, по­этому Р+ с Q+ . Если теперь Р тождественно истинный преди­кат, то Р+ = Мх х М2 х ... х Мп (где Мь М2, ..., Мп — множества, на которых определены я-местные предикаты Р и Q). Но с Л^ х х М2 х ... х Мп. Поэтому Q+ = А/| х М2 х ... х Мпг а, значит, предикат 0 — тождественно истинный предикат. Если же Р — выполнимый предикат, то ф 0 . Но е Q+. Тогда Q+ ф 0 и Q — выполнимый предикат.

б) Пусть Q — тождественно ложный предикат. Тогда Q+= 0. Но Р+ el поэтому = 0. Следовательно, предикат Р — тожде­ственно ложный. Наконец, пусть Q — опровержимый предикат. Тогда Q+ ф Мхх М2х ... х Мп. Поскольку, кроме того, Р+ е Q+ и е М{х х М2 х ... х Л/Л, то Р+ ф М{х М2х ... х А/Л. Следовательно, предикат Р — опровержимый. □

Отыщите самостоятельно в настоящем и предыдущем пунктах данного параграфа утверждения, обосновывающие остальные сформулированные теоремы.

**20. *Логические операции над предикатами и их свойства.***

Их множества истинности (нет)

Предикаты так же, как высказывания, могут принимать два значения: “истина” (1) и “ложь” (0), поэтому к ним применимы все операции логики высказываний, в результате чего из элементарных предикатов формируются сложные предикаты (как и в логике высказываний, где из элементарных высказываний формировались сложные, составные). Рассмотрим применение операций логики высказываний к предикатам на примерах одноместных предикатов. Эти операции в логике предикатов сохраняют тот же смысл, который был им присвоен в логике высказываний.

Отрицание предиката.. Отрицанием п-местно- го предиката Р(хь х2, ..., хп), определенного на множествах Мъ М2, ..., Мп, называется новый *n*-местный предикат, определен­ный на тех же множествах, обозначаемый ¬ P(хь х2, ..., хп), (чи­тается: «неверно, что Р(хи х2, ..., хп)»), который превращается в истинное высказывание при всех тех и только тех значениях пред­метных переменных, при которых исходное высказывание пре­вращается в ложное высказывание.

Другими словами, предикат ¬ P(хь х2, ..., хп) таков, что для любых предметов а{ ϵ Ми а2 ϵ М2, ..., ап ϵ Мп высказывание ¬ P(aь a2, ..., aп) является отрицанием высказывания Р(аи аъ ..., ап).

Теорема 19.2. Для n-местного предиката Р(хь хъ ..., хп), опреде­ленного на множествах Мъ М2, ..., Мn, множество истинности его отрицания ¬ P(хь х2, ..., хп) совпадает с дополнением множества истинности данного предиката: (¬P)+= Р+  с отриц на верху!!!!!.

(Здесь следует понимать, что дополнение рассматривается в множестве М1× М2× ... × Мп, т.е. (¬ Р)+ = (М1× М2× ... × Мп)\ Р+.) P с отриц на верху!!!!!.

*Следствие 19.3. Отрицание предиката будет тождественно ис­тинным тогда и только тогда, когда исходный предикат тожде­ственно ложен.*

Конъюнкция двух предикатов.. Конъюнкцией n-местного предиката Р(хь х2, ..., хп), определенного на множествах Мъ М2, ..., Мn, и m-местного предиката Q(yu У2, Ут), определен­ного на множествах N1, N2, Nm, называется новый (n + m)-мест­ный предикат, определенный на множествах М1,М2,  ..., Мn N1 ,N2, Nm, обозначаемый Р(хи х2, ..., хп) ˄ Q(yu у2, ..., ут) (чита­ется «Р(хи х2, ..., хп) и Q(yu у2, ..., ут)»), который превращается в истинное высказывание при всех тех и только тех значениях пред­метных переменных, при которых оба исходных предиката пре­вращаются в истинные высказывания.

Другими словами, предикат *Р{хъ хъ ..., хп)* ˄ *Q(yu у2, ..., ут)* таков, что для любых предметов *ах* ϵ *М{, а2* ϵ *Мъ ..., ап* ϵ *Мп* и *b1* ϵ *N1 b2* ϵ *N2, ..., bm* ϵ *Nm* высказывание *Р(а1 а2,* ..., *ап)* ˄ *Q(b1 b2* …, bn) является конъюнкцией высказываний *Р(аи а2, ..., ап)* и *Q(bu b2, ..., bm).*

*Теорема 19.6. Для п-местных предикатов Р(хъ* х2, *хп)* и Q(xb *x2 хп), определенных на множествах Мь М2, ..., Мт множество истинности конъюнкции Р{хь х2,* ..., *хп)* ˄ *Q(x1 х*2*,* ..., *хп) совпада­ет с пересечением множеств истинности исходных предикатов:*

*(P*˄ *Q)+= P+* ˄ *Q+*

*Следствие 19.*7. *Конъюнкция двух предикатов тождественно ис­тинна тогда и только тогда, когда оба да˧нных предиката тожде­ственно истинны.*

Дизъюнкция двух предикатов. Дизъюнкцией п-местного предиката Р(хь х2, ..., хп), определенного на множе­ствах М1 М2, ..., Мп, и m-местного предиката Q(y1 у2, ..., ут), определенного на множествах Nx, N2, ..., Nm, называется новый (п + m)-местный предикат, определенный на множествах М1 М2,..., Мп, N1, N2, ..., Nm, обозначаемый Р(хи х2, ..., хп) ˅ Q(yu у2, ут) (читается «Р(хи х2, ..., хп) или Q(yu у2, ..., ут)»)9 который превращается в истинное высказывание при всех тех и только тех значениях предметных переменных, при которых в истинное вы­сказывание превращается по меньшей мере один из исходных пре­дикатов.

Другими словами, предикат *Р(хи х2,* ..., *хп)* v *Q(yu у2, ут)* таков, что для любых предметов *ах* ϵ *Мх, а2* ϵ *М2*, ..., *ап* ϵ *М„* и *bx* ϵ *Nx, b2* ϵ *N2, ..., bm* ϵ *Nm* высказывание *P(a\, a2, ..., an)* v *Q(b1, b2,…, bm)* является дизъюнкцией высказываний *Р(аи аъ* ..., дЛ) и *Q(bu h, 6m).*

Следующая теорема аналогична теореме 19.6.

*Теорема 19.9. Для п-местных предикатов* Р(хь х2, ..., *хп) и Q{xu х2,.., хп), определенных на множествах Ми М2, ..., Мт множество истинности дизъюнкции* Р(хь *х2,* ..., *хп)* ˅ *Q(xu х2, ..., хп) совпада­ет с объединением множеств истинности исходных предикатов:*

*(P* ˅ *Q)+= P+* U *Q+*

*Следствие 19.10. Дизъюнкция двух предикатов есть выполнимый предикат тогда и только тогда, когда по меньшей мере один из дан­ных предикатов выполним.*

*Следствие 19.11. Дизъюнкция двух предикатов тождественно ложна тогда и только тогда, когда оба данных предиката тожде­ственно ложны.*

Свойства отрицания, конъюнкции и дизъюнкции. После введе­ния трех операций над предикатами возникают вопросы: как они влияют на равносильность предикатов и каковы закономерности образования с помощью этих операций равносильных предика­тов? Аналогичны вопросы для следования предикатов. Ответ дает следующая теорема.

*Теорема 19.12. Если во всех формулах теоремы 3.2 под Р, Q, R понимать предикаты, определенные на соответствующих множествах, знак всюду заменить знаком <=>, а знак —> — знаком =>, то получим верные утверждения о предикатах.*

Доказательство. Рассмотрим, например, вторую из формул д) теоремы 3.2. Она превращается в следующее утверждение: (Pv(Qa л R)) <=> ((Р v Q) л (Р v R)), означающее равносильность пре­дикатов Р v (Q л R) и (Р v Q) л (Р v R) независимо от преди­катов Р, Q, R. Проверим, верно ли данное утверждение. В самом деле, каждый из двух предикатов при любой подстановке вме­сто предметных переменных конкретных предметов из соответ­ствующих множеств превращается в такое высказывание, кото­рое на основании тавтологии из теоремы 3.2, д имеет одинако­вые значения истинности. На основании определения равно­сильности предикатов это и означает, что данные предикаты равносильны. □

Импликация и эквивалентность двух предикатов. Импликация Р(хи х2, ..., хп) → Q(yu у2, ..., ут) определяется как такой преди­кат, что для любых предметов ах ϵ Мь а2 ϵ М2,..., а„ ϵ Мп и b1ϵ Nu b2 ϵ N2,..., bmϵ Nm высказывание P(ah a2, ..., an) →Q(bu b2, ..., bm) является импликацией высказываний Р(аь а2, ..., ап) и Q(bb b2, ..., bm). Аналогично определяется эквивалентность двух предикатов. Не­трудно проверить, что импликация двух предикатов, зависящих от одних и тех же переменных, есть тождественно истинный пре­дикат тогда и только тогда, когда ее заключение является след­ствием посылки, а эквивалентность тождественно истинна, если и только если исходные предикаты равносильны. Свойства этих операций над предикатами, подобно свойствам операций отри­цания, конъюнкции и дизъюнкции над предикатами (см. теорему 19.12), получаются из соответствующих тавтологий теоремы 3.3. Так, если Р, Q, R — предикаты, то, например,

*а) (P→ (Q→ R)) => ((P → Q)→(P → R));*

*д) (¬ Q* ˄ *(Р* → *Q)) => ¬ P;*

*п) (Р↔ Q)*⬄(Q ↔ *Р)*

и т.д. Аналогично, из тавтологий теоремы 3.4 получаются равно­сильности, выражающие одни логические операции над предика­тами через другие. Например,

а) *(Р→ Q)*⬄( ¬ *Р˅Q)*

*в) (Р˄ Q)*⬄ ¬ (¬ *Р˄ ¬Q)*

ж) *(Р↔ Q)*⬄ *(Р→ Q)*˄(Q →*Р)*

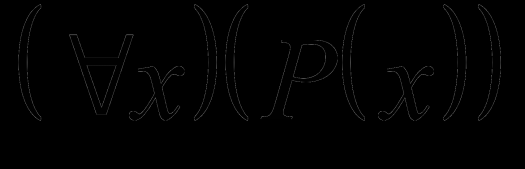
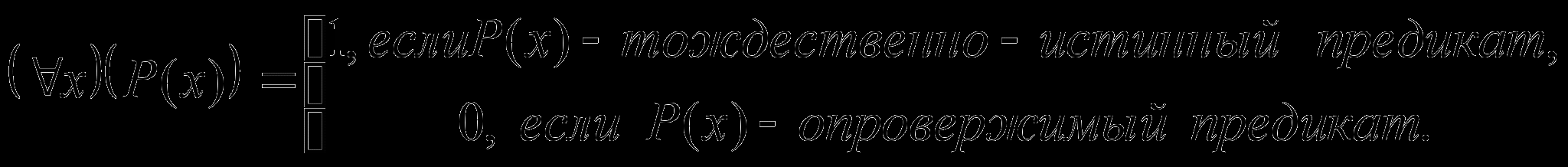
и так далее для любых предикатов Р, Q, R

21. Определение кванторных операций над предикатами

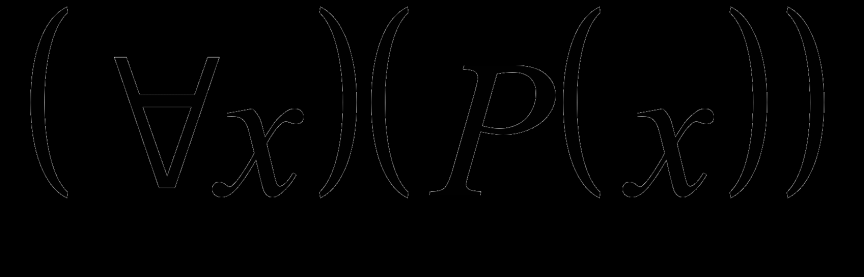
Специфическая природа предикатов, позволяет ввести над ними такие операции, которые не имеют аналогов среди операций над высказываниями. Имеются в виду две кванторные операции над предикатами.

^ Квантор общности

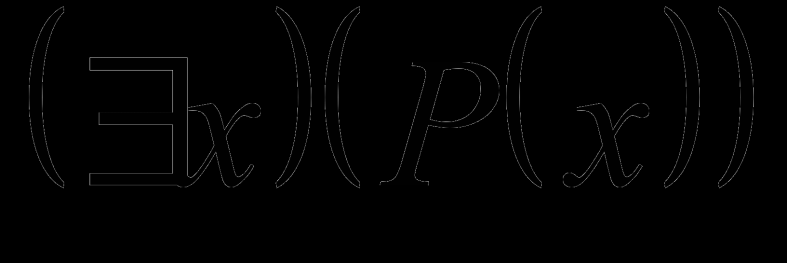
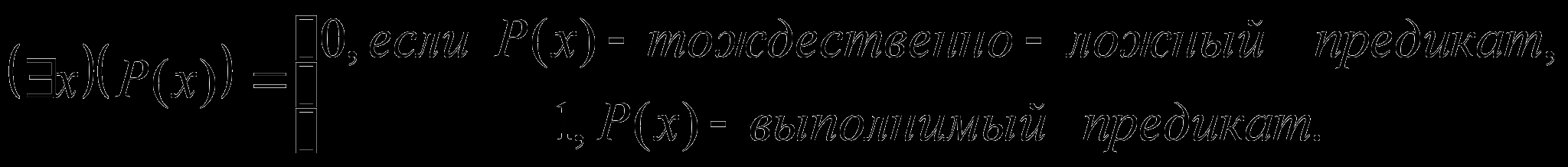
Для превращения одноместного предиката в высказывание нужно вместо его переменной подставить какой-нибудь конкретный предмет из области задания предиката. Имеется еще один способ для такого превращения – это применение к предикату операций связывания квантором общности или квантором существования. Каждая из этих операций ставит в соответствие одноместному предикату некоторое высказывание, истинное или ложное в зависимости от исходного предиката.

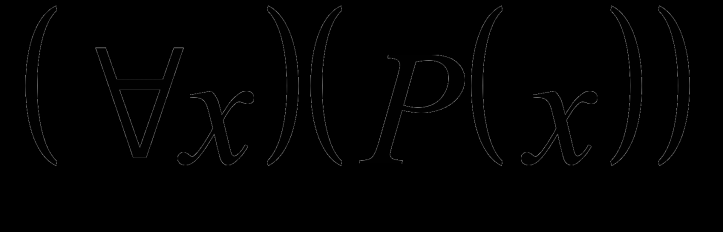
Определение. Операцией связывания квантором общности называется правило, по которому каждому одноместному предикату Р(х), определенному на множестве М, сопоставляется высказывание, обозначаемое  , которое истинно в том и только в том случае, когда предикат Р(х) тождественно истинен, и ложно в противном случае, то есть  Словесным аналогом квантору общности  является: «для любого», «для каждого», «для всякого» и т.п.

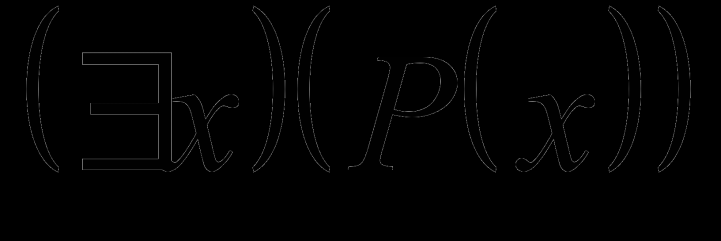
В выражении переменная х уже перестает быть переменной в обычном смысле этого слова, то есть вместо нее невозможно подставить какие бы то ни было конкретные значения. Говорят, что переменная х связанная.

Если одноместный предикат Р(х) задан на конечном множестве М = {a1, a2, …, an}, то высказывание  эквивалентно конъюнкции Р(а1) Р(а2) …  Р(аn).

Квантор существования

Определение. Операцией связывания квантором существования называется правило, по которому каждому одноместному предикату Р(х), определенному на множестве М, сопоставляется высказывание, обозначаемое  , которое ложно в том и только в том случае, когда предикат Р(х) тождественно ложен, и истинно в противном случае, то есть  Словесным аналогом квантору существования  является: «существует», «найдется» и т.п. Подобно выражению



в выражении  переменная х также перестает быть переменной в обычном смысле этого слова: это - связанная переменная .

Если одноместный предикат Р(х) задан на конечном множестве М = {a1, a2, …, an}, то высказывание эквивалентно дизъюнкции Р(а1) Р(а2) …  Р(аn).

22 . Определение формулы логики предикатов. Интерпретация формулы (нет)

*Формула логики предикатов* определяется индуктивно по следующей схеме: 1) Всякая пропозициональная переменная (т. е. 0-местный предикат) есть формула. 2) Если — *n*-местный предикат, то P(x1, …, xn) — формула. Все переменные x1, …xn — свободные переменные, связанных переменных в этой формуле нет. 3) Если A — формула, то ¬ A — формула с теми же свободными и связанными переменными, что и в формуле A. 4) Если A и B — формулы, причем нет таких переменных, которые были бы связанными в одной формуле и свободными в другой, то выражения (A & B), (A ˅ B), (A → B), (A ~ B), (A ⊕ B), суть формулы, в которых свободные переменные формул A и B остаются свободными, а связанные переменные формул A и B остаются связанными.

5) Если A — формула, содержащая свободную предметную переменную *x*, то∀xA и ∃*xA* — тоже формулы. Переменная *x* в них связана. Остальные же переменные, которые в формуле A были свободны, остаются свободными и в новых формулах. Переменные, которые были связаны в A, связаны и в новых фор-мулах. 6) Других формул, кроме построенных по правилам пяти предыдущих пунктов, нет. Из этого определения ясно, что всякая формула алгебры вы-сказываний является формулой логики предикатов. Как обычно, часть скобок, определяющих порядок действий в формуле, мож-но опускать. Формула вида P(x1, …,xn), где P— n-местный предикат, называется а*томарной* (или *элементарной*). *Литеральной фор-мулой* (или *литералом*) называют атомарную формулу или отри-цание атомарной формулы. Атомарная формула называется *положительным литералом*, а ее отрицание — *отрицательным литералом*. *Дизъюнкт* — это дизъюнкция конечного числа лите-ралов. Если дизъюнкт не содержит литералов, его называют *пустым* дизъюнктом.

23 . Классификация формул логики предикатов. Равносильность формул

Классификация формул логики предикатов. Если в формулу ло­гики предикатов вместо каждой предикатной переменной подста­вить конкретный предикат, определенный на некотором выбран­ном множестве М, то формула превратится в конкретный преди­кат, заданный над множеством М. При этом, если исходная фор­мула была замкнутой, то полученный конкретный предикат ока­жется нульместным, т.е. будет высказыванием. Если же исходная формула была открытой, т. е. содержала свободные вхождения пред­метных переменных, то в результате подстановки получим преди­кат, зависящий от некоторых предметных переменных. Если теперь подставить вместо этих предметных переменных конкретные пред­меты из множества М, то полученный предикат, а следовательно, и исходная формула превратятся в конкретное высказывание.

Превращение формулы логики предикатов в высказывание опи­санным выше способом (а также само получаемое высказывание)

называется интерпретацией этой формулы на множестве М. Итак, если формула логики предикатов замкнутая, т.е. не содержит сво­бодных предметных переменных, то ее интерпретация состоит из одного этапа и сводится к подстановке вместо всех предикатных переменных конкретных предикатов, в результате чего формула превращается в конкретное высказывание (нульместный преди­кат). Если же формула логики предикатов открытая, т.е. содержит ряд свободных предметных переменных, то ее интерпретация со­стоит из двух этапов. Во-первых, вместо всех предикатных пере­менных необходимо подставить конкретные предикаты, в резуль­тате чего формула превратится в конкретный предикат, завися­щий от такого количества предметных переменных, сколько было свободных предметных переменных в исходной формуле. Во-вто­рых, нужно придать значение каждой предметной переменной, от которой зависит получившийся предикат, в результате чего этот предикат (и, значит, вся исходная формула) превратится в конкретное высказывание (истинное или ложное).

Сформулируем классификационные определения для формул логики предикатов.

Определение 21.4. Формула логики предикатов называется вы­полнимой (опровержимой) на множестве М, если при некоторой подстановке вместо предикатных переменных конкретных преди­катов, заданных на этом множестве, она превращается в выпол­нимый (опровержимый) предикат.

Другими словами, формула выполнима (опровержима) на М, если существует истинная (ложная) ее интерпретация на М. Фор­мула из примера 21.2 является как выполнимой, так и опровер­жимой. Еще один пример такой формулы приведен в Задачнике, № 9.35, л. А в задаче № 9.54 подробно разбирается пример форму­лы, выполнимой на множестве из трех элементов и невыполни­мой ни на каком множестве из двух элементов.

Определение 21.5. Формула логики предикатов называется тож­дественно истинной (тождественно ложной) на множестве М, если при всякой подстановке вместо предикатных переменных любых конкретных предикатов, заданных на этом множестве, она пре­вращается в тождественно истинный (тождественно ложный) предикат.

Определение 21.6. Формула логики предикатов называется об­щезначимой, или тавтологией (тождественно ложной или проти­воречием), если при всякой подстановке вместо предикатных пе­ременных любых конкретных предикатов, заданных на каких угодно множествах, она превращается в тождественно истинный (тожде­ственно ложный) предикат. (Тот факт, что формула F является тавтологией, обозначается, как и в алгебре высказываний, = F.)

Понятие равносильности формул. Определение 22.1. Две форму­лы, F и H логики предикатов называются равносильными на мно­жестве М, если при любой подстановке в эти формулы вместо предикатных переменных любых конкретных предикатов, опре­деленных на М, формулы превращаются в равносильные преди­каты. Если две формулы равносильны на любых множествах, то их будем называть просто равносильными. Равносильность формул бу­дем обозначать так: F ≡ H.

Приведем пример двух неравносильных формул логики пре­дикатов. Покажем, что (Vx)(P(x) v Q(x)) ≠ (\/х)(Р(х)) v (\/x)(Q(x)). В самом деле, подставим вместо предикатных переменных Р(х) и Q(x) конкретные предикаты А(х) и В(х), определенные на множестве N соответственно, где А(х) есть «x: — четно», а В(х) есть «x — нечетно». Тогда левая формула превратится в высказы­вание (нульместный предикат) «каждое натуральное число либо нечетно, либо четно», которое истинно. Правая формула превра­щается в высказывание (нульместный предикат) «либо каждое натуральное число четно, либо каждое натуральное число нечет­но», которое ложно..

Как и в алгебре высказываний, можно заменять одну равно­сильную формулу другой. Переход от одной равносильной форму­лы к другой называется равносильным преобразованием исходной формулы. В процессе равносильных преобразований формул логи­ки предикатов могут использоваться равносильности, известные из алгебры высказываний.

24. Тавтологии логики предикатов. Правила получения тавтологий

Тавтологии логики предикатов

Напомним, что формула алгебры высказываний,принимающая значение 1 (истина) при любом наборе значений входящих в нее переменных, называется тождественно истинной или тавтологией. Формулу логики предикатов называют общезначимой (или тождественно истинной, или тавтологией), если при всякой подстановке вместо предикатных переменных любых конкретных предикатов, заданных на каких угодно множествах, она превращается в тождественно истинный предикат. Общезначимую формулу называют также логическим законом. Формулу A назовем выполнимой, если формула ¬A не является тождественно истинной. Формулу логики предикатов называют тождественно ложной (или противоречием), если при всякой подстановке вместо предикатных переменных любых конкретных предикатов, заданных на каких угодно множествах, она превращается в тождественно ложный предикат.

Напомним, что проблемой разрешения для алгебры высказы-ваний называется следующий вопрос: существует ли алгоритм, позволяющий для произвольной логической формулы в конечное число шагов выяснить, является ли она тождественно истин-ной? Как отмечалось, этот вопрос имеет положительное решение (подробно о понятии алгоритма будет рассказано ниже, на с. 63). Проблема распознавания общезначимости формул логики предикатов существенно сложнее. Она также называется пробле-мой разрешения. Метод перебора всех вариантов здесь не приме-ним, так как вариантов может быть бесконечно много. В 1936 го-ду А. Чёрч доказал, что в общем виде проблема разрешения для логики предикатов не имеет алгоритмического решения. Сфор-мулируем соответствующую теорему: **Теорема Чёрча.** Не существует алгоритма, который для любой формулы логики предикатов устанавливает, общезначима она или нет.

Основные правила получения тавтологий.

Теорема 3.5 (правило заключения). Если формулы F и F→H являются тавтологиями, то формула Н также тавтология. Други­ми словами, из = F и =F→ Н следует = Н.

Доказательство. Пусть =F(X1,… Xn )и =F(X1,… Xn )→Н(ХЬ ..., Х„). Предположим, что формула Н(Х1 ..., Х„) не явля­ется тавтологией. Это означает, что существуют такие конкрет­ные высказывания А1 ...,Аn, что λ(H( А1 ...,Аn ))= 0. Поскольку F(X1 ..., Хn) — тавтология, то для А1 ..., А„ имеем λ(F(A1 ..., А,,)) = 1. Вычисляем, пользуясь соотношением (1.4): λ(F(Ab..., Ап) → Н(А1..., Аn)) = λ(F(A1 ..., А„)) →λ(H(А1 ..., Ап)) = 1→ 0 = 0, что противоре­чит тождественной истинности формулы F → Н. Следовательно, предположение неверно. Тогда = Н, что и требовалось доказать. □ Правило заключения называется также правилом отделения или правилом «модус понено (modus ponens).

Второе правило получения тавтологий носит название правила подстановки. Пусть в формуле F содержится пропозициональная переменная X (а возможно, и другие пропозициональные пере­менные), и Н— любая формула. Если в формулу F вместо символа X везде, где он входит в F, вставить формулу H, то получим но­вую формулу. Она обозначается SHXFи называется формулой, полу­ченной из F в результате подстановки в нее формулы Н вместо про­позициональной переменной X.

Если формула F содержит две пропозициональные переменные Хи У (а возможно, и еще несколько), то можно определить одно­временную подстановку двух формул Н и G в формулу F вместо пропозициональных переменных Хи У соответственно как одновре­менную замену символа X всюду, где он входит в F\ формулой Н и символа Yвсюду, где он входит в F, формулой G. Получающуюся формулу обозначают SHGxyF.

Теорема 3.6 (правило подстановки). Если формула F, содержащая пропозициональную переменную Ху является тавтологией, то подста­новка в формулу F вместо переменной Xл юбой формулы Н снова приво­дит к тавтологии. Другими словами, из = F следует = SxhF.

Доказательство. Так как =F(X, Y,...), то формула F(X, Y,...) превращается в истинное высказывание при подстановке вместо всех пропозициональных переменных X, Y, ... любых конкретных высказываний. Истинность получаемого высказывания не зависит от структуры подставляемых вместо X, Y,... высказываний. В част­ности, вместо Сможет быть подставлено высказывание, которое само является конкретизацией формулы H(Z1 ..., Zk) на некото­ром наборе конкретных высказываний. Но это и означает, что тав­тологией будет формула F(H(Z1 ..., Zk), Y,... ), т.е. = ShxF, что и требовалось доказать. □

25.Проблема разрешимости формул логики предикатов

Проблема разрешимости - эта проблема ставится для формул исчисления предикатов, лишённых символов постоянных предметов и символов индивиду-альных предикатов. В последующем изложении предполагается, что рассматри-ваемые формулы таковы (если не сделано специальных оговорок).   
Каждая такая формула представляет собой определённое утверждение, ис-тинное или ложное, когда оно относится к определённому полю M.   
Если такая формула истинна для некоторого поля M и некоторых предика-тов, на нём определённых, мы будем называть её выполнимой.   
Если формула истинна для данного поля M и для всех предикатов, определён-ных на M, мы будем называть её тождественно истинной для поля M.   
Если формула истинна для всякого поля M и для всяких предикатов, будем называть её тождественно истинной или просто истинной.   
Формула называется ложной или невыполнимой, если ни для какого поля ни при каких замещениях предикатов она не является истинной. Легко показать, что если формула U тождественно истинна, то формула ложна, и наоборот.   
Постановка проблемы разрешимости для логики предикатов аналогична по-становке этой проблемы для алгебры высказываний. Её решение и является це-лью данной курсовой работы. Итак, проблема ставится следующим образом: дать эффективный способ для определения - является ли данная формула вы-полнимой или нет.   
Умея решать вопрос о выполнимости, мы тем самым сможем решать и во-прос об истинности любой формулы. В самом деле, если формула U истинна, то формула невыполнима, и обратно. Поэтому, доказав выполнимость или не-выполнимость , мы тем самым проверим истинность U. Проблема разреши-мости для логики предикатов является усилением проблемы разрешимости для исчисления высказываний, так как все формулы исчисления высказываний вхо-дят в число формул логики предикатов. Однако в то время как решение пробле-мы разрешимости для исчисления высказываний никаких трудностей не пред-ставляет, проблема разрешимости для логики предикатов оказалась связанной с серьёзными трудностями.   
Современные исследования пролили свет на природу этих затруднений. В настоящее время представляется достаточно ясным, что решение этой проблемы в указанном смысле вообще невозможно. Иначе говоря, не может существовать никакого конструктивного правила, которое позволяло бы определять для лю-бой формулы логики предикатов, является ли она тождественно истинной или нет. Для некоторых частных типов формул, однако, проблема разрешимости решается. Мы рассмотрим наиболее важный тип формул, для которых решение проблемы разрешимости может быть осуществлено, это формулы логики пре-дикатов, зависящие от одного переменного.

26. Исчисление предикатов: мататеоремы.

Метатеорема

        теорема относительно объектов (понятий, определений, аксиом, доказательств, правил вывода, теорем и др.) какой-либо научной теории (т. н. предметной, или объектной, теории), доказываемая средствами метатеории (См. [Метатеория](http://dic.academic.ru/dic.nsf/bse/108623/%D0%9C%D0%B5%D1%82%D0%B0%D1%82%D0%B5%D0%BE%D1%80%D0%B8%D1%8F)) этой теории. Термин «М.» употребляется преимущественно в применении к теоремам об объектах формализованных теорий (т. е. в случае, когда предметная теория является [Исчисление](http://dic.academic.ru/dic.nsf/bse/91599/%D0%98%D1%81%D1%87%D0%B8%D1%81%D0%BB%D0%B5%D0%BD%D0%B8%D0%B5)м, или формальной системой (См. [Формальная система](http://dic.academic.ru/dic.nsf/bse/145441/%D0%A4%D0%BE%D1%80%D0%BC%D0%B0%D0%BB%D1%8C%D0%BD%D0%B0%D1%8F))). Если М., относящаяся к какому-либо логико-математическому исчислению, доказывается т. н. финитными средствами, ни в какой форме не использующими абстракции актуальной бесконечности, то её относят к метаматематике (См. [Метаматематика](http://dic.academic.ru/dic.nsf/bse/108589/%D0%9C%D0%B5%D1%82%D0%B0%D0%BC%D0%B0%D1%82%D0%B5%D0%BC%D0%B0%D1%82%D0%B8%D0%BA%D0%B0)); таковы, например, теорема о дедукции для исчисления высказываний или исчисления предикатов, теорема Гёделя о неполноте формальной арифметики и более богатых систем (см. [Полнота](http://dic.academic.ru/dic.nsf/bse/122206/%D0%9F%D0%BE%D0%BB%D0%BD%D0%BE%D1%82%D0%B0) в логике), теорема Чёрча о неразрешимости разрешения проблемы (См. [Разрешения проблема](http://dic.academic.ru/dic.nsf/bse/125997/%D0%A0%D0%B0%D0%B7%D1%80%D0%B5%D1%88%D0%B5%D0%BD%D0%B8%D1%8F)) для исчисления предикатов, теорема Тарского о неопределимости предиката истинности для широкого класса исчислений средствами самих этих исчислений. Если же на характер трактуемых в М. понятий и (или) на средства её доказательства не накладывается никаких финитистских, или конструктивистских (см. [Конструктивное направление](http://dic.academic.ru/dic.nsf/bse/97977/%D0%9A%D0%BE%D0%BD%D1%81%D1%82%D1%80%D1%83%D0%BA%D1%82%D0%B8%D0%B2%D0%BD%D0%BE%D0%B5) в математике), ограничений, то такую М. причисляют к т. н. теоретико-множественной логике предикатов; примеры: теорема Гёделя о полноте исчисления предикатов, теорема Лёвенхейма — Сколема об интерпретируемости любой непротиворечивой теории на области натуральных чисел и вообще любые предложения, в которых говорится что-либо о «произвольной интерпретации», «совокупности всех интерпретаций», «общезначимости» и т.п. (в частности, все результаты о категоричности различных систем аксиом, т. е. об [Изоморфизм](http://dic.academic.ru/dic.nsf/bse/162199/%D0%98%D0%B7%D0%BE%D0%BC%D0%BE%D1%80%D1%84%D0%B8%D0%B7%D0%BC)е произвольных их интерпретаций, удовлетворяющих, быть может, некоторым дополнительным условиям). К М. относятся и любые теоремы о теоремах содержательных математических теорий, например многочисленные «принципы двойственности» из различных областей математики (проективная геометрия, многие алгебраические теории и др.).

27.Двойственные формулы Закон двойственности.

Определение.

Формулы А и А\* называются двойственными, если формула А\* получается из формулы А путем замены в ней каждой операции на двойственную.

Имеет место следующий закон двойственности: если формулы А и В равносильны, то равносильны и им двойственные формулы, т.е. А\* ≡ В\*.

28. Интуитивное понятие алгоритма. Вычислительные и логические алгоритмы.

Приведём *интуитивное* (*наивное*) *определение алгоритма*. Совокупность правил, обладающих свойствами *массовости* (инвариантности относительно входной информации), *детерменированности* (однозначности применения этих правил на каждом шаге), *результативности* (получения после применения этих правил информации, являющейся результатом) и *элементарности* (отсутствии необходимости дальнейшего уточнения правил), называется *алгоритмом*.

***Алгоритмом*** называется формализованное описание последователь-

ности необходимых действий компьютера для выполнения какой-либо

операции, решения задачи. Алгоритм предназначен для использования при

подготовке ***программы*** – системы команд для компьютера.

Алгоритмы, в соответствии с которыми решение поставленных задач

сводится к математическим действиям, называются ***вычислительными***

***алгоритмами***. Примерами вычислительных алгоритмов могут служить ал-

горитмы расчетов по различным математическим формулам. Алгоритмы, в

соответствии с которыми решение поставленных задач сводится к логиче-

ским действиям, называются ***логическими алгоритмами***. Примерами ло-

гических алгоритмов могут служить алгоритмы поиска минимального чис-

ла, поиска пути на графе, сортировки.

29. Алфавитный оператор. Алгоритм как конструктивно заданный алфавит

Понятие алфавитного оператора является наиболее общим. К нему фактически сводятся любые процессы преобразования информации. К изучению алфавитных операторов фактически сводится теория любых преобразователей информации. Основой теории алфавитных операторов являются способы их задания. Если область определения алфавитного оператора конечна, то оператор может быть задан простой таблицей соответствия. В случае бесконечной области определения алфавитного оператора он задается системой правил, позволяющей за конечное число шагов найти выходное слово, соответствующее заданному входному слову. Алфавитные операторы, задаваемые с помощью конечной системы правил, называются алгоритмами.

Алгоритмы, в соответствии с которыми решение поставленных задач сводится к арифметическим действиям, называются численными алгоритмами. Алгоритмы, в соответствии с которыми решение поставленных задач сводится к логическим действиям, называются логическими алгоритмами. Различают однозначные и многозначные алфавитные операторы. Под однозначным алфавитным оператором понимается такой алфавитный оператор, который каждому входному слову ставит в соответствие не более одного выходного слова. Под многозначным алфавитным оператором понимается такой алфавитный оператор, который каждому входному слову ставит в соответствие более одного выходного слова. Алфавитный оператор, не сопоставляющий данному входному слову аi никакого выходного слова bj (в том числе и пустого), не определен на этом слове. Совокупность всех слов, на которых алфавитный оператор определен, называется областью его определения. Два алфавитных оператора считаются равными, если равны соответствующие им алфавитные операторы и совпадает система правил, задающих действие этих алгоритмов на выходные слова. Два алгоритма считаются эквивалентными, если у них совпадают алфавитные операторы, но не совпадают способы их задания (система правил). Обычно в теории алгоритмов рассматриваются лишь такие алгоритмы, которым соответствуют однозначные алфавитные операторы.

Интуитивное определение алгоритма не позволяет рассматривать свойства алгоритмов как свойства формальных объектов. Поэтому математическое определение алгоритма необходимо по следующим причинам:

1) только при наличии формального определения алгоритма можно сделать вывод о разрешимости или неразрешимости каких-либо проблем;

2) это дает возможность для сравнения алгоритмов, предназначенных для решения одинаковых задач;

3) это дает возможность для сравнения различных проблем по сложности алгоритмов их решения.

Одна из причин расплывчатости интуитивного определения алгоритма состоит в том, что объектом алгоритма может оказаться все, что угодно. Поэтому естественно было начать с формализации понятия объекта. В вычислительных алгоритмах объектами работы являются числа, в алгоритме шахматной игры - фигуры и позиции, при алгоритмизации производственных процессов объектами служат, например, показания приборов. Однако алгоритмы оперируют не с объектами реального мира, а с изображениями этих объектов. Поэтому алгоритмами в современной математике принято называть конструктивно задаваемые соответствия между изображениями объектов в абстрактных алфавитах. Абстрактным алфавитом называется любая конечная совокупность объектов, называемых буквами или символами данного алфавита. При этом природа этих объектов нас совершенно не интересует. Символом абстрактных алфавитов можно считать буквы алфавита какого-либо языка, цифры, любые значки и даже слова некоторого конкретного языка. Основным требованием к алфавиту является его конечность. Таким образом, можно утверждать, что алфавит - это конечное множество различных символов. Алфавит, как любое множество, задается перечислением его элементов. Итак, объекты реального мира можно изображать словами в различных алфавитах. Это позволяет считать, что объектами работы алгоритмов могут быть только слова. Тогда можно сформулировать следующее определение. Алгоритм есть четкая конечная система правил для преобразования слов из некоторого алфавита в слова из этого же алфавита. Слово, к которому применяется алгоритм, называется входным. Слово, вырабатываемое в результате применения алгоритма, называется выходным. Совокупность слов, к которым применим данный алгоритм, называется областью применимости этого алгоритма

**(хз, оставила на всякий случай)** Тезис Тьюринга.

*Для любого алгоритма*, *понимаемого в интуитивном смысле*, *можно построить машину Тьюринга*, *функционирование которой эквивалентно этому алгоритму*.

Понятие машины Тьюринга является строгим уточнением интуитивного понятия алгоритма и позволяет решить вопрос алгоритмической (машинной) разрешимости той или иной проблемы.

Проблема является *алгоритмически неразрешимой*, если не существует алгоритма (соответствующей машины Тьюринга) для ее решения. Заметим, что отдельная машина Тьюринга может быть представлена как программа

30. Теорема Тьюринга

Класс функций, вычислимых на машине Тьюринга совпадает с классом частично-рекурсивных функций.

31. Машина Тьюринга

Представим себе ленту произвольной длины. Лента вертикальными черточками разделена на равные участки, называемые ячейками. В каждой ячейке может быть записан один символ (цифра, буква, знак препинания, математический символ и прочее

Примечание: греческая буква «ламбда» у нас будет обозначать пустую ячейку, в которой никакой символ не записан.

Последовательность символов на ленте будем называть записью или словом. В нашем примере запись предлагает решить элементарную задачу – сложить два числа. Под лентой размещается так называемая головка ( положение ее у нас показано символом состояния машины – в данном случае символ q0), способная читать определенный символ в ячейке, или, стерев старый, записать в ячейку новый. Также головка способна перемещаться вдоль ленты на одну позицию за один такт работы машины Тьюринга влево или вправо. Можно считать головку неподвижной, а за один такт на одну ячейку смещается лента (в этом случае влево, вправо меняются местами). Кроме того машина Тьюринга (далее - МТ) должна иметь еще одно принципиальной важности устройство – устройство управления. Назначение устройства управления – задать машине правила записи-стирания символов на ленте, правила движения головки (ленты), а также правила изменения состояния машины. Создать (запрограммировать) МТ, фактически означает создать ее устройство управления.

Устройство управление – это никакое ни «железо», ни «электроника». Это – нарисованная (напечатанная) на листе бумаги прямоугольная таблица. Мы уже уточнили, что представленную на рис.1 запись можно трактовать как исходное задание машине решить задачу. Разработать таблицу управления машины, если задание задано в общем виде, т.е. вместо цифр 5 и 3 будут любые цифры или числа десятичной системы счисления уже достаточно трудно. Поэтому для примера изобразим таблицу управления МТ только для конкретной записи, изображенной на рис.1. Такая таблица может выглядеть так, как показано на рис.2.

Рис.2 «Устройство управления» машины Тьюринга для сложения чисел 5 и 3

Примечание: Таблица для удобства размещения на странице разделена на две части – верхнюю и нижнюю. Для восстановления ее единства необходимо нижнюю часть «приклеить» справа к верхней.

Как понимать эту таблицу? Пусть до начала работы головка находится, как показано на рис.1, под буквой «с», а машина пребывает в начальном состоянии, обозначенным символом q0. Смотрим клетку таблицы на пересечении строки с буквой «с» и столбца с символом q0. В этой клетке записана последовательность (тройка) символов сRq0. Тройка символов – это команда МТ. В данном конкретном случае эту тройку следует понимать так: машина в ячейке, под которой расположена головка, сохранит букву «с» (точнее – сотрет букву «с» и вновь запишет букву «с»); оставит машину в прежнем состоянии q0 и сдвинет головку (пусть движется головка) на один шаг вправо (буква R от слова Right – вправо).

В начале следующего такта головка теперь расположена под ячейкой с буквой «л». Смотрим в таблице строку с буквой «л» и столбец с символом q0, т.к. машина по прежнему находится в состоянии q0. На их пересечении – команда (тройка) уRq0. Нам уже понятно, что по этой команде буква «а» стирается, на ее место записывается буква «у», машина по прежнему остается в состоянии q0, а головка вновь сдвигается на один шаг вправо.

Читатель теперь без труда, самостоятельно, может проследить как будет работать машина до момента, когда головка прочитает с ленты символ «?». Очевидно, что вместо знака вопроса она запишет цифру 8. Следует только обратить внимание, что машина теперь перейдет в состояние q1, а головка никуда не сдвинется (буква «H» от слова Halt – стоять). Теперь по таблице легко проследить, что головка, ничего на ленте не изменяя, будет двигаться влево (буква «L» от слова Left – влево) до тех пор, пока не окажется под пустой ячейкой (символ «ламбда»). Здесь видно, что головка остановится и машина перейдет в состояние S (от слова Stop – останов).

Читатель может спросить – зачем нужно было после получения ответа (число 8) двигать головку вдоль всей ленты влево: результат же был получен раньше? В самом деле, можно было без этого обойтись, но для более строгой (в математическом смысле) трактовки работы МТ целесообразно головку в конце работы помещать относительно ленты там, где она была вначале. Наиболее внимательные обязательно заметят, что это требование нашей машиной нарушено: головка на одну позицию оказалась левее исходной. Исправить этот «недостаток» легко: достаточно команду-тройку "ламбда"HS последней строки таблицы ( на рис.2) заменит командой-тройкой "ламбда"RS. Слово-результат после окончания вычислений показано на рис.3.

Рис.3 Слово на ленте после окончания вычислений

Еще какой-нибудь придирчивый читатель обязательно скептически заметит: подумаешь – машина записала заранее известный результат, она его не вычислила, он был записан человеком, создателем таблицы. Стоило ли для этого «городить» машину? Отвечаем. Во-первых, пусть читатель, если он не только придирчив, но и внимателен, попробует «сгородить» машину хотя бы для произвольных одноразрядных слагаемых (сумма уже может оказаться двухразрядной). И, во-вторых, и это самое главное – в машине Тьюринга всевозможные математические (и не только математические) задачи оказались сведенными к сколь угодно длинной череде одних и тех же простейших операций: считать-записать символ, сдвинуть головку и перевести машину из одного состояния в другое. Всё!!! Это и есть общее, единое для любых, самых разных вычислений. Поэтому, в более строгой форме мы можем заявить – задача вычислима (существует алгоритм решения задачи), если существует машина Тьюринга, решающая эту задачу. В данном случае не важно – идет ли речь о подсчете на калькуляторе стоимости покупок в магазине, или расчете в компьютере траектории полета космического корабля. Разумеется, никто не будет использовать машину Тьюринга для решения даже самых простых задач. Неоспоримая заслуга Алена Тьюринга состоит в том, что он нашел единый (и достаточно наглядный) способ определения вычислимости.

48. Алан Тьюринг (Turing) в 1936 году опубликовал в трудах Лондонского математического общества статью «О вычислимых числах в приложении к проблеме разрешения», которая наравне с работами Поста и Черча лежит в основе современной теории алгоритмов.

Предыстория создания этой работы связана с формулировкой Давидом Гильбертом на Международном математическом конгрессе в Париже в 1900 году неразрешенных математических проблем. Одной из них была задача до-казательства непротиворечивости системы аксиом обычной арифметики, которую Гильберт в дальнейшем уточнил как «проблему разрешимости» - нахождение общего метода, для определения выполнимости данного высказывания на языке формальной логики.

Статья Тьюринга как раз и давала ответ на эту проблему - вторая про-блема Гильберта оказалась неразрешимой. Но значение статьи Тьюринга выходило далеко за рамки той задачи, по поводу которой она была написана.

Приведем характеристику этой работы, принадлежащую Джону Хоп-крофту: «Работая над проблемой Гильберта, Тьюрингу пришлось дать четкое определение самого понятия метода. Отталкиваясь от интуитивного представления о методе как о некоем алгоритме, т.е. процедуре, которая может быть выполнена механически, без творческого вмешательства, он показал, как эту идею можно воплотить в виде подробной модели вычислительного процесса. Полученная модель вычислений, в которой каждый алгоритм разбивался на последовательность простых, элементарных шагов, и была логической конструкцией, названной впоследствии машиной Тьюринга».

Машина Тьюринга является расширением модели конечного автомата, расширением, включающим потенциально бесконечную память с возможностью перехода (движения) от обозреваемой в данный момент ячейки к ее левому или правому соседу.

Формально машина Тьюринга может быть описана следующим образом: Пусть заданы:

конечное множество состояний – Q, в которых может находиться машина Тьюринга;

конечное множество символов ленты – Г;

функция (функция переходов или программа), которая задается отображением пары из декартова произведения Q x Г (машина находится в состоянии и обозревает символ ) в тройку декартова произведения Q х Г х {L,R} (машина переходит в состояние , заменяет символ на символ и передвигается влево или вправо на один символ ленты) – Q x Г-->Q х Г х {L,R}

один символ из Г-->е (пустой);

подмножество є Г --> определяется как подмножество входных символов ленты, причем е є (Г-);

одно из состояний – є Q является начальным состоянием машины.

Решаемая проблема задается путем записи конечного количества символов из множества є Г – Si є на ленту:e S1 S2 S3 S4 ......... Sn e

после чего машина переводится в начальное состояние и головка устанавливается у самого левого непустого символа – , после чего в соответствии с указанной функцией переходов (, )-->(,, L или R) машина начинает заменять обозреваемые символы, передвигать головку вправо или влево и переходить в другие состояния, предписанные функций переходов.

Остановка машины происходит в том случае, если для пары (,) функ-ция перехода не определена.

Алан Тьюринг высказал предположение, что любой алгоритм в интуитивном смысле этого слова может быть представлен эквивалентной машиной Тьюринга. Это предположение известно как тезис Черча–Тьюринга. Каждый компьютер может моделировать машину Тьюринга (операции перезаписи ячеек, сравнения и перехода к другой соседней ячейке с учетом изменения состояния машины). Следовательно, он может моделировать алгоритмы в любом формализме, и из этого тезиса следует, что все компьютеры (независимо от мощности, архитектуры и т.д.) эквивалентны с точки зрения принципиальной возможности решения алгоритмических задач.

33. Основные понятия нечеткой логики.

Высказывание называется нечетким, если про него можно сказать, что оно одновременно истинно и ложно.

Мера истинности нечеткого высказывания A определяется функцией принадлежности mA(x), заданной на X={0,1}. Четкое истинное высказывание - mA(x)=1, четкое ложное - mA(x)=0. Для нечетких высказываний определены логические операции отрицания, конъюнкции, дизъюнкции, импликации и эквивалетности.

34. Нечеткие множества

Нечёткое (или размытое, расплывчатое, туманное, путанное, пушистое) множество — понятие, введённое Лотфи Заде в 1965 г. в статье «Fuzzy Sets» (нечёткие множества) в журнале Information and Control [1]. Л. Заде расширил классическое канторовское понятие множества, допустив, что характеристическая функция (функция принадлежности элемента множеству) может принимать любые значения в интервале 0,1, а не только значения 0 или 1 .

В обычной теории множеств существуют несколько способов задания множества. Одним из них является задание с помощью характеристической функции, определяемой следующим образом. Пусть U - так называемое универсальное множество, из элементов которого образованы все остальные множества, рассматриваемые в настоящей задаче, например множество всех целых чисел, множество всех гладких функций, заданных на действительной оси, и т.д. В дальнейшем в качестве универсального будет, как правило, использовано множество всех действительных чисел. Характеристическая функция множества A K U - это функция mA , значения которой указывают, является ли x k U элементом множества A:

Особенностью этой функции является бинарный характер ее значений - 1 или 0.

С точки зрения характеристической функции нечеткие множества являются естественным обобщением обычных множеств, когда мы отказываемся от бинарного характера этой функции и предполагаем, что она может принимать любые значения из отрезка [0, 1]. В теории нечетких множеств характеристическая функция называется функцией принадлежности, а ее значение mA(x) - степенью принадлежности элемента x нечеткому множеству A.

Более строго, нечетким множеством A называется совокупность пар

" x k U {(x; mA(x))},

где mA - функция принадлежности: mA : U [0, 1]. Пусть, например, U = {a, b, c, d, e}, A = {(a; 0), (b; 0,1), (c; 0,5), (d; 0,9), (e; 1)}. Будем говорить тогда, что элемент a не принадлежит множеству A, элемент b принадлежит ему в малой степени, элемент c более или менее принадлежит, элемент d принадлежит в значительной степени, e является элементом A.

В различных приложениях используются различные функции принадлежности, приведем несколько типичных примеров таких функций для множеств, заданных словесно. Пусть A - множество чисел, близких к 10, тогда можно принять

mA(x) = (1 + k | x - 10 | m)-1, k > 0, m = 3;

в зависимости от требуемой степени близости к 10 показатель степени m может быть взят равным 1, 2, 4 и т.д. Например, для описания множества чисел, очень близких к 10, можно положить m = 4; для множества чисел, не очень далеких от 10, m = 2. Учет более тонких нюансов может быть произведен за счет коэффициента k или использования дробной степени показателя m.

Если B - множество чисел, значительно больших 10, то в качестве функции принадлежности может быть взята функция

Если С - множество чисел, которые не должны значительно выходить за пределы интервала (4, 8), то

mC(x) = (1 + k(x - 6)2)-1, k > 0.

Приближенные графики рассмотренных функций приведены на рис. 1, а.

Ясно, что конкретный вид функции принадлежности (и значения входящих в нее параметров) носит в значительной мере субъективный характер. Уменьшить степень этой субъективности можно используя метод экспертных оценок, суть которого состоит в том, что как вид функции принадлежности, так и значения соответствующих параметров являются результатом коллективного творчества группы специалистов в рассматриваемой области - экспертов.

Пусть, например, решается задача определения значения некоторого параметра a. Тогда каждым из n экспертов назначается свое значение этого параметра - a1 , a2 , \_, an , эти числа усредняются:

и полученный результат используется в качестве значения параметра a. В соответствии со степенью опытности экспертов им могут быть присвоены веса u1 , u2 , \_ \_, un , с учетом которых предыдущая формула несколько усложняется:

где u = u1 + u2 + \_ + un . Более детально с методом экспертных оценок и другими вариантами его использования можно познакомиться в работе [2].

Коротко остановимся на понятии лингвистической переменной. Не вдаваясь в тонкости, ее можно определить как переменную, значениями (термами) которой являются не числа, а слова или предложения естественного (или формального) языка. Например, лингвистическая переменная "возраст" может принимать следующие значения: очень молодой, молодой, среднего возраста, старый, очень старый и другие - в зависимости от требуемой степени детальности описания. Ясно, что переменная "возраст" будет обычной переменной, если ее значения - точные числа; лингвистической она становится будучи использована в нечетких рассуждениях человека.

Каждому терму лингвистической переменной соответствует определенное нечеткое множество со своей функцией принадлежности, которая описывает совместимость этого терма с различными числовыми значениями. Так, лингвистическому значению "молодой" может соответствовать функция принадлежности, приведенная на рис. 1, б.

Вспомним также известную книгу Г. Остера "Зарядка для хвоста", где попугай и слоненок обсуждают, сколько орехов составляют кучу: один, два, \_, пять не куча, семь и больше - куча, а шесть? Функция принадлежности, которая описывает результат их рассуждений, приведена на рис. 1, в. Для наглядности ее график изображен сплошной линией.

Более детально с понятием лингвистической переменной и многочисленными примерами можно познакомиться в работе [1].

ОПЕРАЦИИ

НАД НЕЧЕТКИМИ МНОЖЕСТВАМИ

Над нечеткими множествами можно производить различные операции, при этом необходимо определить их так, чтобы в частном случае, когда нечеткое множество является четким (обычным), эти операции переходили в обычные операции теории множеств, то есть операции над нечеткими множествами должны обобщать соответствующие операции над обычными множествами. При этом обобщение может быть реализовано различными способами, из-за чего какой-либо операции над обычными множествами может соответствовать несколько операций в теории нечетких множеств.

Начнем с отношения между множествами. Пусть A и B - нечеткие множества; будем говорить, что A содержится в B, и обозначать A K B, если

" x k U, mA(x) # mB(x).

Например, если A - множество чисел, очень близких к 10, а B - множество чисел, близких к 10, то A K B. Формально это можно проверить используя функции принадлежности, описанные выше. Если A и B - обычные множества, а mA и mB - характеристические функции, то из неравенства (1) следует, что если некоторый элемент x принадлежит A, то есть mA(x) = 1, то он принадлежит и B, поскольку mB(x) = 1. Таким образом, определение (1) корректно в том смысле, что в частном случае оно переходит в известное.

Два нечетких множества A и B равны в том и только том случае, если равны их функции принадлежности.

Объединением нечетких множеств A и B называется нечеткое множество, обозначаемое A > B, функция принадлежности которого определяется следующим образом:

"x k U, mA > B(x) = max {mA(x), mB(x)}.

Пересечение множеств A < B определяется функцией принадлежности

"x k U, mA < B(x) = min {mA(x), mB(x)}.

Дополнение нечеткого множества A имеет функцию принадлежности На рис. 2 приведены функции принадлежности соответствующих множеств.

Алгебраическое произведение множеств A и B - это множество A " B с функцией принадлежности

mA J B(x) = mA(x)mB(x).

Нетрудно проверить, что в случае обычных множеств эта операция переходит в пересечение множеств, которое, таким образом, имеет в теории нечетких множеств два обобщения: алгебраическое произведение и пересечение. Аналогично обстоит дело и с операцией объединения - в теории нечетких множеств ей соответствуют операции объединения и алгебраической суммы A + + B с функцией принадлежности

mA + B(x) = mA(x) + mB(x) - mA(x)mB(x).

Для операций объединения, пересечения и дополнения нечетких множеств остаются справедливыми практически все свойства соответствующих обычных операций: коммутативность, ассоциативность, дистрибутивность. Читателю предлагается самостоятельно убедиться в справедливости правил де Моргана:

При этом, однако, и Например, если A - множество целых неотрицательных чисел, не очень далеких от 0, то функция mA может иметь вид mA = {(0; 1), (1; 1), (2; 1), (3; 0,9), (4; 0,8), \_, (9; 0,3), \_}. По определению, - множество целых, не очень близких к 0, и = {(0; 0), (1; 0), (2; 0), (3; 0,1), (4; 0,2), \_, (9; 0,7), \_}. Тогда - множество целых, не очень далеких от 0 и одновременно не очень близких к 0: = {(0; 0), (1; 0), (2; 0), (3; 0,1), (4; 0,2), \_, (9; 0,3), \_}.

Операции алгебраического произведения и алгебраической суммы обладают более ограниченным набором свойств, для них не выполняется дистрибутивность, но правила де Моргана остаются в силе: и Другие операции и понятия, связанные с нечеткими множествами, можно найти, например, в [1, 3].

1. Quod erat demonstrandum (*лат*.) – ‘что и требовалось доказать’. [↑](#footnote-ref-2)